例題 52

別解

$(x+1)^{n+1}-1=\{(x+1)-1\}\{(x+1)^n+(x+1)^{n-1}+(x+1)^{n-2}+\cdots+(x+1)^2+(x+1)+1\}$ より，

$(x+1)^{n+1}-1=x\{(x+1)^n+(x+1)^{n-1}+(x+1)^{n-2}+\cdots+(x+1)^2+(x+1)+1\}$

左辺と右辺は x の恒等式だから，各項の係数がそれぞれ等しい。

したがって，x^3 の項の係数が左辺と右辺で一致する。

左辺の x^3 の項の係数

$${}_{n+1}\mathrm{C}_3=\frac{(n+1)!}{3!\{(n+1)-3\}!}=\frac{(n+1)n(n-1)}{6} \quad \cdots ①$$

右辺の x^3 の項の係数

式 $(x+1)^n+(x+1)^{n-1}+(x+1)^{n-2}+\cdots+(x+1)^2+(x+1)+1$ の x^2 の項の係数と等しいから，

$${}_n\mathrm{C}_2+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+{}_{n-2}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_2\mathrm{C}_2 \quad \cdots ②$$

②＝①より，${}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{(n+1)n(n-1)}{6}$